R1 – Formler og sammenhenger som forutsettes kjent til del 1

Potenser og logaritmer

Potenser:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Logaritmer:

$$a = \lg 10^a = 10^{\lg a}$$

$$\lg a^x = x \cdot \lg a$$

$$\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$$

$$\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$$

$$a = \ln e^a = e^{\ln a}$$

$$\ln a^x = x \cdot \ln a$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Grenseverdier

Hvis $f(x)$ nærmer seg b når x nærmer seg a, sier vi at b er grenseverdien til f når x går mot a:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Dersom $f(x)$ går mot $\pm\infty$ når x nærmer seg a, eksisterer ikke grenseverdien. Dette vil være tilfellet hvis f.eks. nevner i en brøk går mot 0 når x går mot a.

Dersom vi får tilfellene $\frac{\infty}{\infty}$ eller $\frac{0}{0}$ når x går mot a, må vi undersøke nærmere. Da kan vi:

- Faktorisere og forkorte
- Bruke l'Hôpitals regel:
  $$\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to a} \frac{p'(x)}{q'(x)}$$

Asymptoter

Vertikale asymptoter

I rasjonale funksjoner finner vi de vertikale asymptotene ved å sette nevner lik 0 og løse for x.

I logaritmefunksjoner finner vi de vertikale asymptotene ved å sette argumentet lik 0 og løse for x.

Horisontale/skrå asymptoter

En rasjonal funksjon har en horisontal asymptote når teller og nevner er av første grad, eller når polynomet i nevner har høyest grad. Beregnes ved $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

En rasjonal funksjon har en skrå asymptote når polynomet i telleren ($t(x)$) har én grad høyere en polynomet i nevneren ($n(x)$). Vi finner den skrå asymptoten ved å gjennomføre divisjonen $t(x) : n(x)$.

Kontinuitet

En funksjon er kontinuerlig for $x = a$ dersom

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

Deriverbarhet

En funksjon er deriverbar for $x = a$ dersom den er kontinuerlig for $x = a$

OG

$$\lim_{x\to a^-} f'(x) = \lim_{x\to a^+} f'(x) = f'(a)$$

Derivasjon

Polynomer: $(x^r)' = rx^{r-1}$

Potensfunksjoner: $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$

Logaritmer: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Eksponentialfunksjoner: $(e^x)' = e^x$

Kvadratrot: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Brøkregelen: $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Produktregelen: $\big(u(x)\cdot v(x)\big)' = u'v + uv'$

Kjerneregelen: $\Big(F\big(u(x)\big)\Big)' = F'(u)\cdot u'(x)$

Faktorisering (skal strengt talt være kjent fra 1T)

1. kvadratsetning: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

2. kvadratsetning: $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

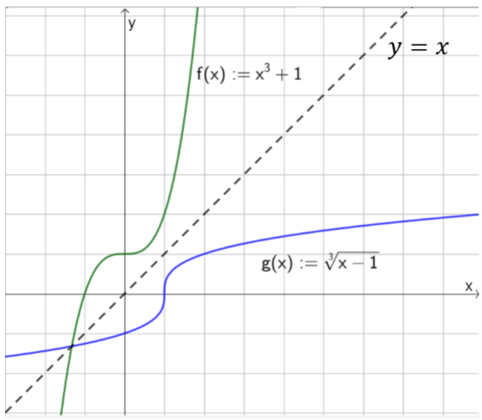
Konjugatsetningen: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Sum-produkt-metoden: $x^2 + bx + c = (x+e)(x+f)$
hvor $e + f = b$ og $e \cdot f = c$

Abc-formel og nullpunktfaktorisering:

For $ax^2 + bx + c = 0$ er $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, og uttrykket kan faktoriseres slik: $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ hvor x_1 og x_2 er løsningene fra abc-formelen

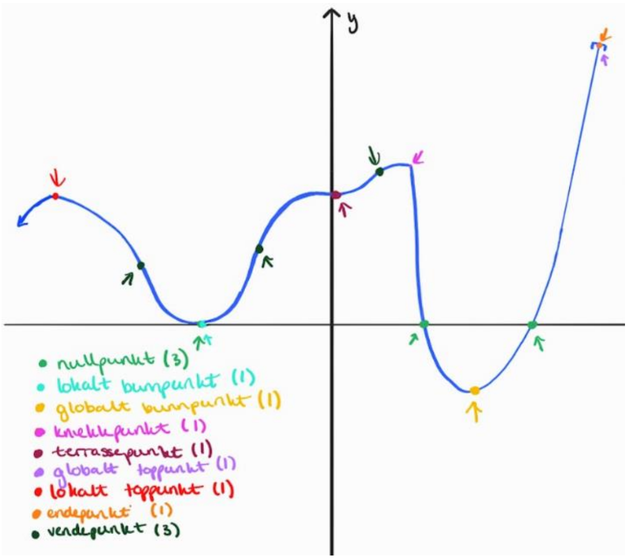
Omvendte funksjoner



Dersom $f(x)$ og $g(x)$ er omvendte funksjoner, gjelder følgende:

- $f(x)$ og $g(x)$ er én-entydige i hele sin definisjonsmengde
- $f(x)$ og $g(x)$ har samme monotoniegenskapene. Dersom f er strengt stigende, er g også det. Dersom f er strengt avtagende er g også det.
- $f(x)$ og $g(x)$ er symmetriske om linja $y = x$.
- $D_f = V_g$ og $V_f = D_g$
- Vi finner den omvendte funksjonen $g(x)$ til $f(x)$ ved å løse $y = f(x)$ med hensyn på x.
- Dersom p er stigningstallet til tangenten i et punkt på $f(x)$ og q er stigningstallet til tangenten i tilsvarende punkt på $g(x)$ så er $p \cdot q = 1$. Det vil si at $p = \frac{1}{q}$ og motsatt.
- Derivasjon av omvendte funksjoner:

$$g'(x) = \frac{1}{f'\big(g(x)\big)}$$



Gitt funksjonen $f(x)$.

Å drøfte en funksjon innebærer å finne informasjon om viktige egenskaper til grafen til funksjonen.

Skjæring med koordinataksene

Førsteaksen (x): $f(x) = 0$ (nullpunkter)

Andreaksen (y): $f(0)$

Kritiske punkter

Stasjonære punkter

$f'(x) = 0$

Lokale topp- og bunnpunkter vil være der den deriverte er 0, samt skifter fortegn. Terrassepunkt vil vi ha der den deriverte er 0, men ikke skifter fortegn.

Monotoniegenskapene beskriver hvor grafen stiger og avtar.

Knekkpunkter

Punkter der funksjonen ikke er deriverbar.

Endepunkter/randpunkter

Her må vi undersøke om vi kan ha globale topp- eller bunnpunkter, altså største eller minste verdi i definisjonsmengden.

Vendepunkter og krumning

$f''(x) = 0$

Grafen har et vendepunkt der den dobbeltderiverte er 0 **og** skifter fortegn.

Krumningen finner vi ved å studere hvor den dobbeltderiverte er positiv og negativ: $f''(x) > 0$ gir smilegraf, $f''(x) < 0$ gir surmunn-graf.

Vendetangent

Tangenten i vendepunktet. Dersom $f(x)$ har vendepunkt i $x = a$, vil likningen til vendetangenten være gitt ved

$y = cx + d$, hvor $c = f'(a)$. Vi kan bestemme konstantleddet d ved å sette inn (x, y)-koordinatet for vendepunktet, samt verdien til c og løse for d.

Vektorer

Vektor mellom to punkter $A(x_A, y_A)$ og $B(x_B, y_B)$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

Gitt to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$

Vektorsum/-differanse

$$\vec{u} \pm \vec{v} = [x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2]$$

Multiplikasjon med skalar

$$t\vec{u} = t[x_1, y_1] = [tx_1, tx_2]$$

Lengde av vektor:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Parallelle vektorer:

$$\vec{u} || \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = k \cdot \vec{v}$$

To vektorer er også parallelle dersom de har samme stigning:

$$\vec{u} || \vec{v} \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Skalarproduktet:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

$$[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

Parameterframstilling for linje:

Gitt et punkt (x_1, y_1) på linja og retningsvektor $\vec{r_l} = [a, b]$:

$$l: \begin{cases} x(t) = x_1 + at \\ y(t) = y_1 + bt \end{cases}$$

(Det er også forventet at du kan sette opp en parameterfremstilling for en rett linje, gitt to punkter).

Vektorfunksjoner:

Posisjonsvektor $\vec{r}(t) = [x(t), y(t)]$

Fartsvektor $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = [x'(t), y'(t)]$

Banefart $v(t) = |\vec{v}(t)|$

Akselerasjonsvektor $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t) =$
$[x''(t), y''(t)]$

Verdi for akselerasjon $a(t) = |\vec{a}(t)|$